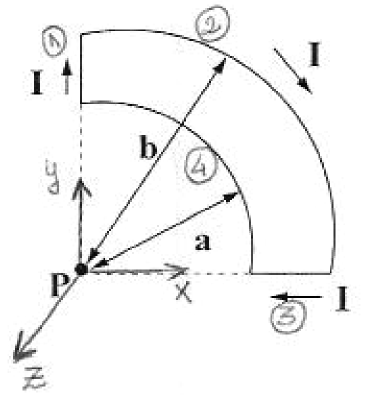
Terceira Prova de Teoria Eletromagnética I, 01/12/2010

Nome: GABARITO

(1ª questão) *(3,0 pontos)*

Determine o vetor campo magnético no ponto P ~~da~~ gerado pela configuração de corrente estacionária I dada pelo circuito ~~formado pela~~ composto da junção dos dois quartos de círculos de raios a e b mostrados abaixo. *Escolha explicitamente um referencial na figura e justifique passo a passo a sua solução.*



Usaremos a lei de Biot-Savart para determinar $\vec{B}$ em P:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}' \times \hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2} \quad , \text{ com } \quad \hat{\mathscr{r}} = \frac{\vec{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}} = \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Dividiremos as contribuições de corrente do circuito em 4 partes:

*) Partes ① e ③: Os segmentos retos ① e ③ não produzem campo em P pois $d\vec{l}' \parallel \vec{\mathscr{r}}$.

*) Parte ②: $$\vec{B}_2(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}' \times \hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi b}{2}} \frac{(dl' \cdot 1 \cdot \operatorname{sen} 90^\circ)(-\hat{z})}{b^2}$$ (→ quarto de círculo)

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi b^2} \int_0^{\frac{\pi b}{2}} dl' \, (-\hat{z}) \Rightarrow \boxed{\vec{B}_2(P) = -\frac{\mu_0 I}{8b} \hat{z}}$$

*) Parte ④: Analogamente $\boxed{\vec{B}_4(P) = \frac{\mu_0 I}{8a} \hat{z}}$

Campo total em P: $\boxed{\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{8} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \hat{z}}$

(2ª questão) *(4,0 pontos)*

Um cilindro longo, de raio $\cancel{a}$ R e composto de material *linear* de permeabilidade μ, é colocado em um campo magnético inicialmente uniforme $\vec{B}_0$, de modo que o eixo do cilindro seja perpendicular a $\vec{B}_0$. Assuma que não existem correntes livres no cilindro e que a região externa ao cilindro possui a permeabilidade magnética μ_0 do espaço livre.

(a) *(1,0 ponto)* Mostre que o campo auxiliar $\vec{H}$ pode ser escrito como o gradiente de uma função W e que o problema de determinar $\vec{H}$ se reduz à solução de uma equação de Laplace.

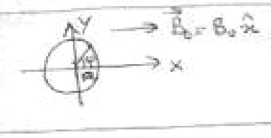
(b) *(2,0 pontos)* Determine as condições de contorno a serem obedecidas por W e por sua derivada normal $\partial W/\partial n$ na superfície do cilindro.

(c) *(1,0 ponto)* A partir da solução da equação de Laplace, encontre o campo magnético $\vec{B}$ resultante dentro do cilindro.

Dado útil: A solução geral da equação de Laplace, assumindo-se simetria cilíndrica, é

$$W(s,\phi) = a_0 + b_0 \ln s + \sum_{k=1}^{\infty} \left[s^k (a_k \cos k\phi + b_k \sin k\phi) + s^{-k} (c_k \cos k\phi + d_k \sin k\phi) \right].$$

Sugestão: 

Vista frontal: 

a) Na ausência de correntes livres: $\vec{J}_f = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{H} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\vec{H} = -\vec{\nabla}W}$ ($\vec{H}$ é o gradiente de uma função W)

Além disso, sendo o meio linear, temos $\vec{B} = \mu\vec{H} \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \mu\,\vec{\nabla}\cdot\vec{H}$ (p/ $r \neq a$)

$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0$. Logo $\vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla}W) = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla^2 W = 0}$

(Resolveremos então, para acharmos $\vec{H}$, uma equação de Laplace p/ W nas regiões $r<a$ e $r>a$).

b)

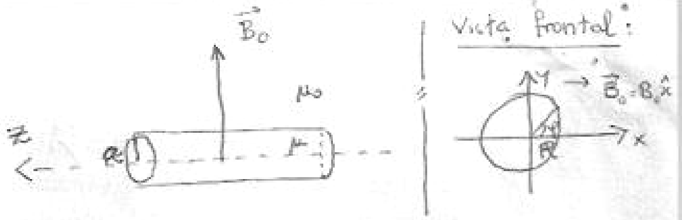
Condições de contorno p/ W: Do teorema fundamental do cálculo p/ gradientes temos $W(b) - W(a) = \int_a^b \vec{\nabla}W\cdot d\vec{l} = -\int_a^b \vec{H}\cdot d\vec{l}$

Tomando-se $a \to b$: $\boxed{\left(W_{acima} - W_{abaixo}\right)\Big|_R = 0} \Rightarrow \boxed{W_{acima} = W_{abaixo}}$

Da ausência de monopolos: $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot(\mu\vec{H}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot(\mu\vec{\nabla}W) = 0$

Tomando essa equação na superfície de contorno: $\mu_0 \vec{\nabla}W_{acima}\cdot\hat{n} - \mu\vec{\nabla}W_{abaixo}\cdot\hat{n} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\left(\mu_0 \frac{\partial W_{acima}}{\partial n} - \mu \frac{\partial W_{abaixo}}{\partial n}\right)\Big|_R = 0}$



c) Eq. de Laplace: $\nabla^2 W = 0$

No infinito temos: $\vec{B} \xrightarrow[s\to\infty]{} \vec{B}_0 \Rightarrow \vec{H} \xrightarrow[s\to\infty]{} \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \frac{B_0\hat{x}}{\mu_0}$

Assim: $W \xrightarrow[s\to\infty]{} W_0 = -\frac{B_0}{\mu_0} x = -\frac{B_0}{\mu_0} s\cos\varphi$

Da solução da Eq. de Laplace em coordenadas cilíndricas, expandimos W como:

$$\boxed{\begin{aligned} W_{in} &= \sum_{k=1}^{\infty} s^k (a_k \cos k\varphi + b_k \operatorname{sen} k\varphi) \\ W_{out} &= -\frac{B_0}{\mu_0} s\cos\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} s^{-k}(c_k \cos k\varphi + d_k \operatorname{sen} k\varphi) \end{aligned}}$$

onde ajustamos W em cada região de modo a termos funções bem comportadas (não-divergentes em zero e com divergência linear em $s\to\infty$).

Impondo condições de contorno:

$$(*)\ W_{in}\Big|_R = W_{out}\Big|_R \Rightarrow \begin{cases} R a_1 = -\frac{B_0}{\mu_0} R + R^{-1} c_1 \Rightarrow \boxed{c_1 = R^2\left(a_1 + \frac{B_0}{\mu_0}\right)} \\ R^k a_k = R^{-k} c_k\ (k\neq 1) \Rightarrow \boxed{c_k = R^{2k} a_k}\ (k\neq 1) \\ R^k b_k = R^{-k} d_k \Rightarrow \boxed{d_k = R^{2k} b_k} \end{cases}$$

$$(**)\left(\mu_0 \frac{\partial W_{out}}{\partial s} - \mu \frac{\partial W_{in}}{\partial s}\right)\Bigg|_R = 0 \Rightarrow \mu_0\left[\left(-\frac{B_0}{\mu_0}\right)\cos\varphi + \sum_k (-k) R^{-k-1}(c_k\cos k\varphi + d_k \operatorname{sen} k\varphi)\right]$$

$$= \mu\left[\sum_k k R^{k-1}(a_k \cos k\varphi + b_k \operatorname{sen} k\varphi)\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -B_0 - \mu_0 R^{-2} c_1 = \mu a_1 \Rightarrow \mu a_1 = -\left(\mu_0 R^{-2} c_1 + B_0\right) = -\left[\mu_0 R^{-2}\left(R^2\left(a_1 + \frac{B_0}{\mu_0}\right)\right) + B_0\right] \\ \Rightarrow \mu a_1 = -\mu_0 a_1 - 2B_0 \Rightarrow \boxed{a_1 = -\frac{2B_0}{\mu_0 + \mu}} \\ -\mu_0 \cancel{k} R^{-k-1} c_k = \mu \cancel{k} R^{k-1} a_k \Rightarrow c_k = -\frac{\mu}{\mu_0} R^{2k} a_k\ (k\neq 1) \Rightarrow \boxed{a_k = c_k = 0}\ (k\neq 1) \\ -\mu_0 \cancel{k} R^{-k-1} d_k = \mu \cancel{k} R^{k-1} b_k \Rightarrow d_k = -\frac{\mu}{\mu_0} R^{2k} b_k \Rightarrow \boxed{d_k = b_k = 0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow W_{in} = -\frac{2B_0}{\mu_0+\mu} \overbrace{s\cos\varphi}^{x} = -\frac{2B_0 x}{\mu_0+\mu} \Rightarrow \vec{H}_{in} = \frac{2B_0}{\mu_0+\mu}\hat{x} = \frac{2\vec{B}_0}{\mu_0+\mu} \Rightarrow \boxed{\vec{B}_{in} = \frac{2\mu \vec{B}_0}{\mu_0+\mu}}$$

(3ª questão) *(3,0 pontos)*

Sobre o comportamento magnético de sistemas físicos, resolva as questões abaixo.

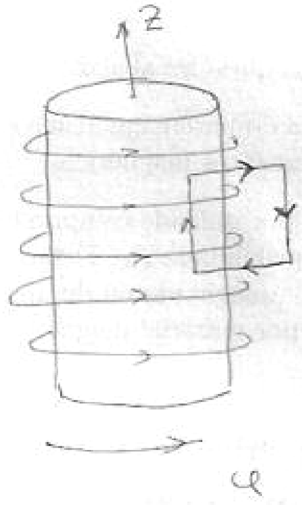
(a) *(1,0 ponto)* Explique qualitativamente a origem microscópica do paramagnetismo e do diamagnetismo, ressaltando as diferenças entre esses dois comportamentos magnéticos.

(b) *(2,0 pontos)* Considere um solenóide infinito (com n espiras por unidade comprimento e corrente I) preenchido com material diamagnético linear de susceptibilidade χ_m. Determine o campo magnético no interior do solenóide e discuta se o campo é aumentado ou diminuído em relação ao caso do solenóide não magnetizado (não preenchido por material magnético).

(a) paramagnetismo – A resposta a um campo aplicado é o alinhamento de dipolos magnéticos na direção e sentido do campo aplicado, ou seja, obtemos $\vec{M}$ na direção de $\vec{B_0}$ (em outras palavras, temos susceptibilidade magnética χ_m positiva). Origem microscópica: torque exercido sobre momentos de dipolos magnéticos microscópicos (comumente o spin eletrônico) quando sujeitos a um campo externo. Efeito típico (mas não exclusivo) de materiais compostos por átomos com camadas externas parcialmente preenchidas, tais como, átomos com nº ímpar de elétrons.

Diamagnetismo – A resposta a um campo aplicado é uma variação do momento de dipolo magnético ~~no~~ sentido oposto ao campo aplicado, ou seja, obtemos $\vec{M}$ na direção oposta a $\vec{B_0}$ (em outras palavras, temos susceptibilidade magnética χ_m negativa). Origem microscópica: resposta do momento magnético orbital contrária ao campo aplicado (comumente é a lei de Lenz aplicada a correntes ~~[illegible]~~ eletrônicas). É um fenômeno universal, ~~[illegible]~~ podendo ocorrer concomitantemente com outros fenômenos (tais como o paramagnetismo). Usualmente, por ser um fenômeno comparativamente fraco, dizemos que o material é diamagnético na ausência de outros fenômenos. Efeito típico (mas não exclusivo) de materiais compostos por átomos com nº par de elétrons.

b)



$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_f^{enc}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H} = nI\hat{z}}$$ (em paralelo com o caso não magnetizado $\vec{B} = \mu_0 n I \hat{z}$)

(dentro)

Meio linear: $\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu_0 n I (1+\chi_m)\hat{z}}$$ (dentro)

Meio diamagnético: $\chi_m < 0 \Rightarrow$ Campo é diminuído em comparação com o caso do solenóide não magnetizado.